<u>Εξέταση Ιουνίου 2021 - Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι</u>

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μία είναι η σωστή απάντηση και αυτή πρέπει να επιλέξετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Ο χρόνος που τέθηκε στην κάθε ερώτηση για τις δύο ομάδες θεμάτων (Α) και (Β) που δημιουργήθηκαν είναι 8 λεπτά με 1 λεπτό διάλειμμα μεταξύ δυό διαδοχικών ερωτήσεων (Μετά τις 5 πρώτες ερωτήσεις υπήρχε διάλειμμα της τάξης των 5 λεπτών) Σε περίπτωση λάθος απάντησης υπάρχει επιβάρυνση 0.25 μονάδες, ενώ η επιλογή **δεν απαντώ** υπάρχει για να μην επιβαρυνθείτε με αρνητική βαθμολόγηση. Στους επιτυχόντες (δηλ. όσοι έγραψαν απο **1.5/10** και άνω) ακολούθησε προφορική εξέταση.

Ερώτηση 1.

(A) Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

- (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ και κάθε $a \in \mathbb{C}$ η εξίσωση $z^n = a$ έχει πάντα n διαφορετικές ρίζες .
- (ii) Για κάθε φανταστικό αριθμό $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ο αριθμός z^z έχει πάντα μη μηδενικό φανταστικό μέρος.
- (iii) Ισχύει: $(-2 + 2i)^3 = 2^3 e^{i\pi/4}$.

(B) Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

- (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ και κάθε $a \in \mathbb{C}^*$ η εξίσωση $z^n = a$ έχει πάντα n διαφορετικές ρίζες.
- (ii) Για κάθε φανταστικό αριθμό $z \in \mathbb{C}^*$ ο αριθμός z^z έχει πάντα μη μηδενικό φανταστικό μέρος.
- (iii) Ισχύει: $(-2 + 2i)^3 = 2^{9/2} e^{i\pi/4}$.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) οι τρεις ισχυρισμοί είναι σωστοί.

(3) οι τρεις ισχυρισμοί είναι λάθος.

(4) το (i) σωστό, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(5) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) λάθος.

(6) το (i) λάθος, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

(7) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) σωστό.

(8) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(9) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

Ερώτηση 2.

(A) Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

(i) Η συνάρτηση $z \mapsto \sin z,\ z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραια και φραγμένη.

(ii) Η εικόνα της συνάρτησης $z \mapsto Im(\log z),\ z \in \mathbb{C}^*$ είναι φραγμένη.

(iii) Έστω $\lim_{z\to 0} h(z) = \infty$. Τότε, $\lim_{z\to 0} e^{-Re(h(z))} = 0$.

(B) Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

(i) Η συνάρτηση $z \mapsto \sin z,\ z \in \mathbb{C}$ είναι συνεχής και μη φραγμένη.

(ii) Η εικόνα της συνάρτησης $z \mapsto Im(z),\ z \in \mathbb{C}$ είναι ανοικτή στο $\mathbb{C}$.

(iii) Ισχύει: $\lim_{z\to\infty} zArg(z) = \infty$.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) οι τρεις ισχυρισμοί είναι σωστοί.

(3) οι τρεις ισχυρισμοί είναι λάθος.

(4) το (i) σωστό, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(5) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) λάθος.

(6) το (i) λάθος, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

(7) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) σωστό.

(8) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(9) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

Ερώτηση 3.

(A) Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(z) = z\log(z^2+1)$ και οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

(i) Η f ορίζεται ολόμορφα στο σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ με παράγωγο:

$$f'(z) = \log(z^2+1) + \frac{2z^2}{z^2+1}.$$

(ii) Η f ορίζεται ολόμορφα στο σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ με παράγωγο:

$$f'(z) = \log(z^2+1) + \frac{2z^2}{z^2+1}.$$

(iii) Η f ορίζεται ολόμορφα στο σύνολο

$$\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : |z|>1, Argz \neq \pm\pi/2\}.$$

(B) Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(z) = z\log(z^2+1)$ και οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

(i) Η f ορίζεται ολόμορφα στο σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ με παράγωγο:

$$f'(z) = \log(z^2+1) + \frac{2z^2}{z^2+1}.$$

(ii) Η f ορίζεται ολόμορφα στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ με παράγωγο:

$$f'(z) = \log(z^2+1) + \frac{2z^2}{z^2+1}.$$

(iii) Η f ορίζεται ολόμορφα στο σύνολο

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, Arg z \neq \pi/2\}.$$

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) οι τρεις ισχυρισμοί είναι σωστοί.

(3) οι τρεις ισχυρισμοί είναι λάθος.

(4) το (i) σωστό, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(5) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) λάθος.

(6) το (i) λάθος, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

(7) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) σωστό.

(8) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(9) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

Ερώτηση 4.

(A) Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

(i) Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C}^*$, ενώ δεν είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C}$.

(ii) Η συνάρτηση $g(z) = Re((z+1)^2),\ z \in \mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στα σημεία του $\mathbb{C}$ για τα οποία $(z+1)^2 = 0$.

(iii) Για τη συνάρτηση $h(x+iy) = x^2 - y^2 - 2ixy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει $\bar{\partial}h(x+iy) = 2x - i2y$.

(B) Δίνονται οι ακόλουθοι τρεις ισχυρισμοί:

(i) Η συνάρτηση $f(z) = \log(z+1)$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, ενώ δεν είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

(ii) Η συνάρτηση $g(z) = Im(z^2+1),\ z \in \mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη μόνο στα σημεία του $\mathbb{C}$ για τα οποία $z^2 + 1 = 0$.

(iii) Για τη συνάρτηση $h(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει $\bar{\partial}h(x+iy) = 2x - i2y$.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) οι τρεις ισχυρισμοί είναι σωστοί.

(3) οι τρεις ισχυρισμοί είναι λάθος.

(4) το (i) σωστό, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(5) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) λάθος.

(6) το (i) λάθος, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

(7) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) σωστό.

(8) το (i) λάθος, το (ii) σωστό, το (iii) λάθος.

(9) το (i) σωστό, το (ii) λάθος, το (iii) σωστό.

Ερώτηση 5.

(A) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Για την $f(z) = -\log(2+z),\ z \in D(-1,1)$, ισχύει:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-1}(z+1)^{n-1}.$$

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(z - \frac{1}{\sqrt{2}})^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(B) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Για την $f(z) = \log(2+z),\ z \in D(-1,1)$, ισχύει:

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n-1}(z+1)^{n-1}.$$

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με 1.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(3) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(4) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(5) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 6.

(A) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$ μπορεί να επεκταθεί σε αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$.

(ii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2z)^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $z \in \partial D(0,1)$.

(B) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ μπορεί να επεκταθεί σε αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$.

(ii) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2z+1)^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς $z \in \partial D(-1/2, 1/2)$.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(3) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(4) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(5) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 7.

(A) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η πολυγωνική γραμμή γ που συνδέει κατά την ακόλουθη σειρά τα σημεία

$$(1,0), (-1,1), (1,3), (2,0), (1,0)$$

έχει δείκτη στροφής $\delta_\gamma(1+2i) = 1$.

(ii) Έστω γ απλή καμπύλη που διαγράφει τι ημικύκλιο από το $-2i$ προς το $2i$ κατά τον μαθηματικά θετικό προσανατολισμό. Τότε

$$\int_\gamma \log z dz = -i.$$

(B) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η πολυγωνική γραμμή γ που συνδέει κατά την ακόλουθη σειρά τα σημεία

$$(1,0), (-1,1), (-1,1/2), (1,1/2), (1,0)$$

έχει δείκτη στροφής $\delta_\gamma(0) = 1$.

(ii) Έστω γ απλή καμπύλη που διαγράφει τι ημικύκλιο από το $-2i$ προς το $2i$ κατά τον μαθηματικά αρνητικό προσανατολισμό. Τότε

$$\int_\gamma \log z dz = -i.$$

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(3) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(4) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(5) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 8.

(A) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η πολυγωνική γραμμή γ που συνδέει τα σημεία $(-1,0),(0,1),(1,0)$ έχει ολοκλήρωμα καμπύλης ίσο με $2(1+i)$

(ii) Έστω γ ο μαθηματικά αρνητικός προσανατολισμένος μοναδιαίος κύκλος. Τότε

$$\int_\gamma \frac{z^2}{2z-1}dz = \frac{\pi}{4i}.$$

(B) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η πολυγωνική γραμμή γ που συνδέει τα σημεία $(-2,0),(0,2),(2,0)$ έχει ολοκλήρωμα καμπύλης ίσο με $4(1+i)$

(ii) Έστω γ ο μαθηματικά θετικός προσανατολισμένος κύκλος κέντρου O και ακτίνας 2. Τότε

$$\int_\gamma \frac{z^2}{2z-1}dz = \frac{\pi i}{2}.$$

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(3) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(4) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(5) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 9.

(A) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Ισχύει: $\cos^2 z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με

$$f(i\frac{n+1}{n}) = -(1 - \frac{1}{(n+1)})^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Τότε, $f(0) = 1$.

(B) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Ισχύει: $(\cos z - \sin z)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με

$$f(i\frac{n+1}{n}) = i(\frac{1}{(n+1)} - 1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Τότε, $f(1) = 1$.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(3) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(4) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(5) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.

Ερώτηση 10.

(A) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η συνάρτηση $f(z) = \tan z$ έχει σε όλα τα σημεία $z = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ απλούς πόλους.

(ii) Ισχύει:

$$\int_{\partial D(0,1/4)} \frac{z^2}{2z+i}dz = -\int_{\partial D(0,1)} \frac{z^2}{2z-i}dz,$$

όταν οι δυο κύκλοι (στα ολοκληρώματα) είναι παραμετρικοποιημένοι με αντίθετους προσανατολισμούς.

(B) Έστω δυο ισχυρισμοί:

(i) Η συνάρτηση $f(z) = \cot z$ έχει σε όλα τα σημεία $z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ουσιώδεις ανωμαλίες.

(ii) Ισχύει:

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{z^2}{2z+i}dz = -\int_{\partial D(0,2)} \frac{z^2}{2z-i}dz,$$

όταν οι δυο κύκλοι (στα ολοκληρώματα) είναι παραμετρικοποιημένοι με τον ίδιο προσανατολισμό.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Το (i) σωστό, το (ii) λάθος.

(3) Το (i) σωστό, το (ii) σωστό.

(4) Το (i) λάθος, το (ii) σωστό.

(5) Το (i) λάθος, το (ii) λάθος.